

ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ПЛЕНОЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ (МОДЕЛЬ НАКОРЯКОВА-ОСТАПЕНКО-БАРТАШЕВИЧ)

Пухначев В.В.^{1,2}, Фроловская О.А.^{1,2}

¹ *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Россия, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15*

² *Новосибирский государственный университет,
630090, Россия, Новосибирск, ул. Пирогова, 2*

В серии работ В.Е. Накорякова, В.В. Остапенко и М.В. Барташевич [1–3] была сформулирована и исследована модель течения пленки по вертикальной стенке с учетом конденсации насыщенного пара или испарения жидкости со свободной поверхности. Она описывает плоские квазистационарные движения при малых числах Рейнольдса в терминах толщины пленки $h(x, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{3} \left(1 + \alpha \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right] = \frac{\beta}{h}. \quad (1)$$

Уравнение (1) записано в безразмерных переменных. Параметры α и β имеют следующий вид:

$$\alpha = \frac{\sigma h_0}{g \rho l^3}, \quad \beta = \frac{(T_s - T_w) \nu \lambda l}{\rho g r h_0^4}.$$

Здесь $h_0 = (\nu^2 / g)^{1/3}$ – характерная толщина пленки, $l \gg h_0$ – характерный продольный масштаб, ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, σ – коэффициент поверхностного натяжения, T_s – температура насыщения, T_w – температура стенки, λ – коэффициент теплопроводности, r – теплота фазового перехода. В качестве масштаба времени выбирается величина $\tau = l / (g \nu)^{1/3}$. Типичные значения параметров α и β таковы: $|\beta| = 1$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-5}$ [3]. Случай $\beta > 0$ соответствует процессу конденсации, а случай $\beta < 0$ – процессу испарения.

Если $\alpha = 0$, уравнение (1) переходит в квазилинейное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} + h^2 \frac{\partial h^2}{\partial x} = 2\beta. \quad (2)$$

В работе [3] подробно исследованы решения этого уравнения, обладающие сильными и слабыми разрывами. Уравнение (2) с помощью замены переменных $h^2(x, t) = u(z, t) + 2\beta t$, $x = z + \beta t^2$ сводится к уравнению Хопфа $u_t + u u_z = 0$, что позволяет строить его решения в виде комбинации ударных волн и центрированных волн разрежения.

При выводе уравнения (1) предполагалось, что величины T_w и T_s постоянны. Оказывается, редукция уравнения (2) к уравнению Хопфа возможна и в случае, когда эти величины являются произвольными функциями времени (в частности, температура стенки может колебаться вблизи температуры насыщения). Это достигается с помощью перехода к новой независимой переменной и искомой функции по формулам

$$x = z + 2 \int_0^t (t-s) \beta(s) ds, \quad h^2(x, t) = u(z, t) + 2 \int_0^t \beta(s) ds.$$

Другой способ интегрирования уравнения (2) состоит в переходе к переменным Лагранжа, $h^2(x, t) = w(\xi, t)$; $x_t = w$, $t > 0$; $x = \xi$, $t = 0$. Функция w удовлетворяет уравнению $w_t = \beta(t)$ и начальному условию $w(\xi, 0) = h_0^2(\xi)$, где h_0 – начальное распределение толщины пленки. Этот способ дает представление решения задачи Коши для уравнения (2) в терминах решения обыкновенного дифференциального уравнения и квадратуры.

Ниже приводятся два новых точных решения уравнения (2). Первое решение соответствует случаю $\beta = 1$ и имеет вид

$$h = (u_- + 2t)^{1/2}, x < Dt + t^2; h = (u_+ + 2t)^{1/2}, x > Dt + t^2, \quad (3)$$

где u_- и u_+ постоянны, $u_- > u_+ > 0$, а скорость скачка конденсации D определяется по формуле $3D = u_- + u_+ + (u_- u_+)^{1/2}$. В работе [3] были найдены решения уравнения (2) в виде бегущих волн с постоянной скоростью распространения разрыва. В отличие от них, в решении (3) фронт конденсации движется с постоянным ускорением, равным 2.

Во втором решении $2\beta = -(t+1)^{-2}$. Здесь $h = (t+1)^{-1/2}(f+1)^{1/2}$, функция $f(\zeta)$ находится как положительное решение уравнения

$$f + (1-W) \ln f = \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$W = \text{const}$, $\zeta = x - W \ln(t+1)$. Пусть $0 < W < 1$. Тогда $f = \zeta[1+o(1)]$ при $\zeta \rightarrow \infty$, $f \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow -\infty$. Решение (4) описывает движение гладкого фронта испарения, скорость которого замедляется с ростом времени пропорционально $(t+1)^{-1}$, а толщина остаточного слоя $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ с асимптотикой $h = t^{-1/2}[1+o(1)]$.

Рассмотрим теперь уравнение (1) в случае $\alpha > 0$. Параметр α , пропорциональный коэффициенту поверхностного натяжения, является естественным регуляризатором задачи. Его учет позволяет исследовать структуру сильных и слабых разрывов, которые присущи решениям укороченного уравнения (2), в частности, структуру бегущих волн. В докладе изучено влияние члена со старшей производной в уравнении (1) на характеристики решений (3) и (4) укороченного уравнения (2) при малых значениях параметра α .

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 13-01-00526). Авторы выражают признательность В.В. Остапенко за полезные обсуждения.

Список литературы:

1. Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., Bartashevich M.V. Heat and mass transfer in the liquid film on a vertical wall in roll-wave regime // Int. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 6514-6518.
2. Накоряков В.Е., Остапенко В.В., Барташевич М.В. Исследование катящихся волн на поверхности стекающей пленки конденсата // Доклады Академии наук. 2014. Т. 454. № 5. С. 540-544.
3. Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., Bartashevich M.V. Rolling waves on the surface of a thin layer of viscous liquid at phase transition // Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. V. 89. P. 846-855.